

Site web : http://www.devoir.tn Email: matheleve@gmail.com	 Devoir de contrôle n°01
Lycée Ali Bourguiba Bembla	4 ^{ème} tech 2 2014-2015 Chortani Atef

Exercice N°1: (6 pts)

1/ Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^2 - \sqrt{2} i z - 1 = 0$

2/ θ étant un réel de l'intervalle $\left] 0, \frac{\pi}{2} \right[$

On considère l'équation $(E_\theta) : z^2 - (1+i)e^{i\theta}z + ie^{2i\theta} = 0$

a) Vérifier que : $((1-i)e^{i\theta})^2 = -2ie^{2i\theta}$

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E_θ)

3/ On donne les nombres complexes suivants : $a = e^{i\theta}$; $b = ie^{i\theta}$ et $c = 1+i$

a) Donner la forme exponentielle de b , c et $a+b$

b) Déduire les valeurs exactes de $\cos(\frac{5\pi}{12})$ et $\sin(\frac{5\pi}{12})$. (Indication : $\frac{5\pi}{12} = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}$)

Exercice N°2: (6 pts)

1) Le plan P est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$

a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - 2z + 4 = 0$.

b) Exprimer les solutions z_1 et z_2 sous forme exponentielle.

2) On donne dans P les points A , B et C d'affixes respectives $1+i\sqrt{3}$, 2 et $1-i\sqrt{3}$
Montrer que le quadrilatère $OABC$ est un losange

4) a) Soit z un nombre complexe distinct de 1 et $\theta \neq 2k\pi$ tel que $\frac{z+1}{z-1} = e^{i\theta}$

Montrer que $z = \frac{-i}{\tan(\frac{\theta}{2})}$

b) En déduire dans $\mathbb{C}$ les solutions de l'équation : (E') :

$$\left(\frac{2z+2}{z-1}\right)^2 - 2\left(\frac{2z+2}{z-1}\right) + 4 = 0$$

Exercice N°3: (8 pts)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = \begin{cases} \frac{x + \cos(\pi x)}{x - 1} & \text{si } x < 1 \\ \sqrt{x^2 + x + 2} - x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

1/a) Montrer que pour tout x de $]-\infty, 1[$ on a : $\frac{x+1}{x-1} \leq f(x) \leq 1$

b) Dédurre $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

2/ Montrer que f est continue en 1

3/ Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet au moins une solution α dans $\left]-\frac{1}{2}, 0\right[$

4/a) Montrer que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{1}{2}$

b) Soit
$$g(x) = \begin{cases} f\left(\frac{1}{\cos x}\right) & \text{si } x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[\\ g\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Montrer que g est continue à gauche en $\frac{\pi}{2}$

